Déterminant de Cauchy

Référence FGN alg 2

Théorème Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{C}^n$ tq $\alpha_i + \beta_j \neq 0 \ \forall i,j$.

Alors :

$$\det\left(\frac{1}{\alpha_i+\beta_j}\right)_{1\leq i,j\leq n} = \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n} (\alpha_j-\alpha_i)(\beta_j-\beta_i)}{\prod_{1\leq i,j\leq n} (\alpha_i+\beta_j)}$$

Démonstration

Posons $D_n = \det\left(\frac{1}{\alpha_i+\beta_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ et montrons par récurrence sur $n \geq 2$ que "$D_n = \dots$" : $\mathcal{P}_n$ est vraie.

$\mathcal{P}_2$: $D_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1+\beta_1} & \frac{1}{\alpha_1+\beta_2} \\ \frac{1}{\alpha_2+\beta_1} & \frac{1}{\alpha_2+\beta_2} \end{vmatrix} = \dfrac{(\alpha_2-\alpha_1)(\beta_2-\beta_1)}{(\alpha_1+\beta_1)(\alpha_2+\beta_2)(\alpha_2+\beta_1)(\alpha_1+\beta_2)}$

donc $\mathcal{P}_2$ est vraie.

$\mathcal{P}_{n-1} \Rightarrow \mathcal{P}_n$ Supposons que $\mathcal{P}_{n-1}$ est vraie.

1ère méthode : bidouille sur le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1+\beta_1} & \dots & \frac{1}{\alpha_1+\beta_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\alpha_n+\beta_1} & \dots & \frac{1}{\alpha_n+\beta_n} \end{vmatrix}$$

Étape 1 : $L_n \rightsquigarrow [1, \dots, 1]$

Étape 2 : L_n vers $[0, \dots, 0, 1]$

Étape 3 : dev $\Delta_{n,n}$.

Étape 1 : $\forall\, 1 \leq j \leq n,\ C_j \longleftarrow C_j \times (\alpha_n + \beta_j)$

$$D_n = \frac{1}{(\alpha_n+\beta_1)\cdots(\alpha_n+\beta_n)} \begin{vmatrix} \frac{\alpha_n+\beta_1}{\alpha_1+\beta_1} & \cdots & \frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_1+\beta_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\alpha_n+\beta_1}{\alpha_{n-1}+\beta_1} & & \frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_{n-1}+\beta_n} \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Or $$\frac{\alpha_n+\beta_j}{\alpha_i+\beta_j} = 1 + \frac{\alpha_n-\alpha_i}{\alpha_i+\beta_j}$$

Donc on fait $\forall\, 1 \leq i \leq n-1,\ L_i \longleftarrow L_i - L_n$

$$D_n = \frac{1}{(\alpha_n+\beta_1)\cdots(\alpha_n+\beta_n)} \begin{vmatrix} & \frac{\alpha_n-\alpha_i}{\alpha_i+\beta_j} & \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$ $\longleftarrow (\alpha_n-\alpha_i)$ en facteur sur la $i$ème ligne $\forall i \leq n-1$

$$= \frac{(\alpha_n-\alpha_1)\cdots(\alpha_n-\alpha_{n-1})}{(\alpha_n+\beta_1)\cdots(\alpha_n+\beta_n)} \begin{vmatrix} & \frac{1}{\alpha_i+\beta_j} & \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Étape 2 $\forall\, 1 \leq j \leq n-1,\ C_j \longleftarrow C_j - C_n$ or $\frac{1}{\alpha_i+\beta_j} - \frac{1}{\alpha_i+\beta_n} = \frac{\beta_n-\beta_j}{(\alpha_i+\beta_j)(\alpha_i+\beta_n)}$

$$D_n = \frac{(\alpha_n-\alpha_1)\cdots(\alpha_n-\alpha_{n-1})}{(\alpha_n+\beta_1)\cdots(\alpha_n+\beta_n)} \begin{vmatrix} & \frac{\beta_n-\beta_j}{(\alpha_i+\beta_j)(\alpha_i+\beta_n)} & & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

· $\beta_n-\beta_j$ en facteur sur la $j$ème col
· $\frac{1}{\alpha_i+\beta_n}$ est facteur sur la $i$ème ligne

Donc

$$D_n = \frac{(\alpha_n-\alpha_1)\cdots(\alpha_n-\alpha_{n-1})(\beta_n-\beta_1)\cdots(\beta_n-\beta_{n-1})}{(\alpha_n+\beta_1)\cdots(\alpha_n+\beta_n)(\alpha_1+\beta_n)\cdots(\alpha_{n-1}+\beta_n)} D_{n-1}$$

D'où $\mathcal{P}_n$ est vraie.

<u>2ème méthode</u> Comme pour Van der Monde.

- Si $\exists i \neq j$, $\alpha_i = \alpha_j$ ou $\beta_i = \beta_j \Rightarrow D_n = 0$
- Supposons que $\alpha_i \neq \alpha_j$ et $\beta_i \neq \beta_j$ $\forall i \neq j$. Posons

$$F(X) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1+\beta_1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_1+\beta_n} \\ \vdots & & \\ \frac{1}{X+\beta_1} & \cdots & \frac{1}{X+\beta_n} \end{vmatrix} \in \mathbb{C}(X)$$

de telle sorte que $F(\alpha_n) = D_n$. En dév % L_n, $d^\circ F \leq -1$ et
m̂ dénom $\Rightarrow$ $F = \frac{P}{(X+\beta_1)\cdots(X+\beta_n)}$ forme irred car β_i pôles.

<u>Pôles de F</u> : $-\beta_1, \dots, -\beta_n$

<u>Zéros de F</u> : $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \Rightarrow P = \lambda(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_{n-1})$

<u>λ?</u> $$(X+\beta_n)F = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1+\beta_1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_1+\beta_n} \\ \vdots & & \\ \frac{X+\beta_n}{X+\beta_1} & \cdots & \frac{X+\beta_n}{X+\beta_n}=1 \end{vmatrix} = \frac{\lambda(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_{n-1})}{(X+\beta_1)\cdots(X+\beta_{n-1})}$$

évalue en $X = -\beta_n$:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1+\beta_1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_1+\beta_{n-1}} & \\ \vdots & \boxed{\Delta_{n,n}} & \vdots & X \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda \frac{(-\beta_n-\alpha_1)\cdots(-\beta_n-\alpha_{n-1})}{(-\beta_n+\beta_1)\cdots(-\beta_n+\beta_{n-1})}$$

$$\Rightarrow \quad D_{n-1} = \lambda \frac{(\alpha_1+\beta_1)\cdots(\alpha_{n-1}+\beta_n)}{(\beta_n-\beta_1)\cdots(\beta_n-\beta_{n-1})}$$

Finalement :

$$F(\alpha_n) = D_n = D_{n-1} \frac{(\beta_n-\beta_1)\cdots(\beta_n-\beta_{n-1})}{(\alpha_{n-1}+\beta_n)\cdots(\alpha_1+\beta_1)} \frac{(\alpha_n-\alpha_1)\cdots(\alpha_n-\alpha_{n-1})}{(\alpha_n+\beta_1)\cdots(\alpha_n+\beta_{n-1})}$$

Conclu par récurrence.

$\square$